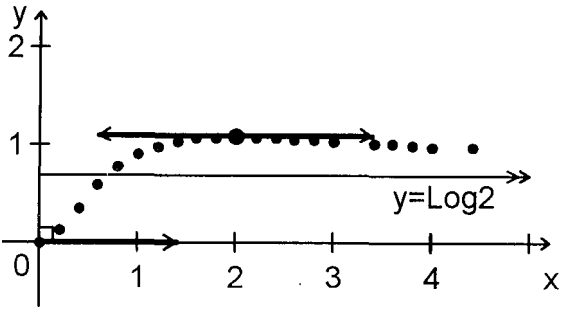
b-

⊕ $F'(0)=0 \Rightarrow$ La courbe de F possède une demi-tangente horizontale en son point d'abscisse 0

⊕ $F'(2)=0 \Rightarrow$ La courbe de F possède une tangente horizontale en son point d'abscisse 2.



⊕ $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=Log2 \Rightarrow$ la droite d'équation $y = Log2$ est une asymptote horizontale à la courbe de F au voisinage de $+\infty$.

III-

1/a- Soit $t \in]0,+\infty[$ on a :

$$h(t) = t - Logt \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{t-Logt} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{t}{t-Logt} \leq t.$$

b- Soit $n \in IN^*$;

$$v_{n+1} - v_n = \int_{\frac{1}{n+1}}^{1} \frac{t}{t-Logt}dt - \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{t}{t-Logt}dt$$

$$= \int_{\frac{1}{n+1}}^{1} \frac{t}{t-Logt}dt + \int_{1}^{\frac{1}{n}} \frac{t}{t-Logt}dt = \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \frac{t}{t-Logt}dt$$

On a : $n+1 \geq n \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$

De plus $\forall t \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]; \frac{t}{t-Logt} \geq 0$

D'où $\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \frac{t}{t-Logt}dt \geq 0$ signifie que $v_{n+1} - v_n \geq 0$

par suite (v_n) est croissante.

c- Pour tout t de $]0,+\infty[$; $\frac{t}{t-Logt} \leq t$ et on a $\forall n \in IN^*, \frac{1}{n} \leq 1$

Donc $\forall n \in IN^*, \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{t}{t-Logt}dt \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} t.dt$

$$\Leftrightarrow \forall n \in IN^*, v_n \leq \left[\frac{1}{2}t^2\right]_{\frac{1}{n}}^{1} \Leftrightarrow \forall n \in IN^*, v_n \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2}$$

D'autre part $\forall n \in IN^*, -\frac{1}{2n^2} < 0$ signifie que $\forall n \in IN^*, \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2} < \frac{1}{2}$

Par suite $\forall n \in IN^*, v_n \leq \frac{1}{2}$

Ce qui permet de dire que (v_n) est majorée .

et comme de plus que (v_n) est croissante sur IN^* alors (v_n) est convergente .